Apellidos y nombre**..**

TEMAS 11 Y 12. CONTROL. CÁLCULO DE PRIMITIVAS. LA INTEGRAL DEFINIDA

1 . Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{3x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx \qquad \text{b) } \int (x+3)\,e^{x+1}\,dx \qquad \text{c) } \int \frac{x}{x^2+2x-8}\,dx$$

Sol:

a) $\displaystyle \int \frac{3x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{3x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{3}{x}+x^{-3/2}\right)dx = 3\,ln\left|x\right| + \frac{x^{-1/2}}{\frac{-1}{2}} + k =$

$$= 3\,ln\left|x\right| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$$

b) $\int (x+3)\,e^{x+1}\,dx$. Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x+3 \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = e^{x+1}\,dx \;\rightarrow\; v = e^{x+1} \end{cases}$$

$$\int (x+3)\,e^{x+1}\,dx = (x+3)\,e^{x+1} - \int e^{x+1}\,dx = (x+3)\,e^{x+1} - e^{x+1} + k = e^{x+1}\,(x+3-1) + k =$$

$$= (x+2)\,e^{x+1} + k$$

c) $\displaystyle \int \frac{x}{x^2+2x-8}\,dx$. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x}{x^2+2x-8} = \frac{x}{(x+4)\,(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)\,(x-2)}$$

- Para $x = 2 \;\rightarrow\; 2 = 6B \;\rightarrow\; B = \frac{1}{3}$

- Para $x = -4 \;\rightarrow\; -4 = -6A \;\rightarrow\; A = \frac{2}{3}$

Por tanto:

$$\int \frac{x}{x^2+2x-8}\,dx = \int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x+4} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}\right)dx = \frac{2}{3}\,ln\left|x+4\right| + \frac{1}{3}\,ln\left|x-2\right| + k$$

Apellidos y nombre...

2. Halla el área limitada entre la curva $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ y el eje X.

Sol:

- Puntos de corte con el eje X:

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - 2x - 3) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

- $G(x) = \int \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right) \;\; dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$
- $G(0) - G(-1) = 0 - \left(\dfrac{-7}{12}\right) = \dfrac{7}{12} \qquad G(3) - G(0) = \dfrac{-45}{4} - 0 = \dfrac{-45}{4}$
- Área $= \dfrac{7}{12} + \dfrac{45}{4} = \dfrac{71}{6}$ u^2

3. Halla estas integrales definidas e indefinidas:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2x(x-1)^2\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x+2)\; sen\,x\,dx$

Sol:

$$a)\int_{-1}^{3} 2x(x-1)^2\,dx = \int_{-1}^{3} 2x\left(x^2 - 2x + 1\right)\,dx = \int_{-1}^{3}\left(2x^3 - 4x^2 + 2x\right)\,dx = \left.\frac{2x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + x^2\right|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

b) $\int (x+2) sen\,x\;dx$. Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x + 2 \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = sen\,x\;dx \;\rightarrow\; v = -cos\,x \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (x+2)\;sen\,x\;dx = -(x+2)\;cos\,x\Big|_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi} cos\,x\;dx = -(x+2)\;cos\,x + sen\,x\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 2\pi$$

4. Hallar la integral definida:

$$\int_0^3 \left|x^2 - x\right| dx$$

Sol:

$$\int_0^3 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx + \int_1^3 (x^2 - x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{6}$$